

# A Magyarorszáki tározó optimális térfogatának meghatározása Moran-modellel

Fekete Árpád\*, Keve Gábor\*

\*Nemzeti Közszolgálati Egyetem, Víz tudományi Kar (Fekete.Arpad@uni-nke.hu; Keve.Gabor@uni-nke.hu)

## Kivonat

Dolgozatunkban a Moran-féle tározóméretezési eljárással végzünk hidrológiai számításokat Magyarorszáknál a Baranya-csatornán kiviteli stádiumban lévő árvízcsúcs csökkentő tározóra. A DDVIZIG, mint az érintett térség vízkészlet-gazdálkodásáért felelős állami szervezete, 2013-ban készítette el a „Tározási lehetőségek a Baranya-csatorna vízgyűjtőjén” című műszaki tanulmánytervét. A tervben szerepelt a Magyarorszáki tározó megvalósításának elképzelése is, melynek elsődleges célja a tavaszi árvízveszély csökkentése a víz visszatartásával. A másodlagos célként fogalmazódott meg a vízhasznosítás igényeinek biztosítása, mint például az aszályos időszakok alatti öntözővíz igény ellátása. Tanulmányunkban az elméletileg lehetséges legnagyobb tározóméret becslését tűztük ki célul, melyben a kiürülés valószínűsége a lehető legnagyobb vízkivétel mellett is minimális, azaz a vízszolgáltatás biztonsága maximális. Számításainkhoz a 2012-2018 évek közötti adatsort vettük figyelembe. Az adatsor rövidsége (7 év) lehetővé tette, hogy elvégezzük a számításokat egy közelítőleg optimális tározóméretre. A pontosabb számításhoz hosszabb adatsor szükséges, de egy előzetes becsléshez és a módszer bemutatásához még ezen rövid adatsor is elegendő.

## Kulcsszavak

Tározás, Moran-modell, Markov-lánc, átmenetvalószínűségi mátrix, stacionárius határeloszlás, kiürülés határvalószínűsége.

## The Dimensioning of Magyarország Reservoir by Moran's Model in order to Calculate the Optimal Size for Possible Water Uses

### Abstract

In this study we carried out hydrological calculations by the Moran's reservoir sizing method about the planned flood reducing reservoir on Baranya canal at Magyarország. The State Organization of Water Management (the DDVIZIG) prepared the engineering plan of „The Possibilities of Constructing a Reservoir on Baranya Canal” in 2013. In this study you can also find the plan of the Magyarország Reservoir which is meant to reduce the high water level in spring by stopping the water. The other main point of the Magyarország Reservoir is to provide water for different purposes like irrigation during the periods of dry weather. In this study the theoretically biggest reservoir size is calculated. In case of withdrawing the largest amount of water from this reservoir the possibility of exhaustion is minimal, so the certainty of water supply is maximal. For the calculations we used the data between 2012 and 2018. The shortness of the period (7 years) made us capable of calculating the approximate optimal size of the reservoir without the help of using computer. For the precise calculations more data are needed, but this small amount of data is sufficient for the preliminary estimates and describing the calculating method.

### Keywords

water storage in reservoirs, Moran's model, Markov chain, the matrix of transition probabilities, stationary limiting distribution, probability of exhaustion.

## BEVEZETÉS

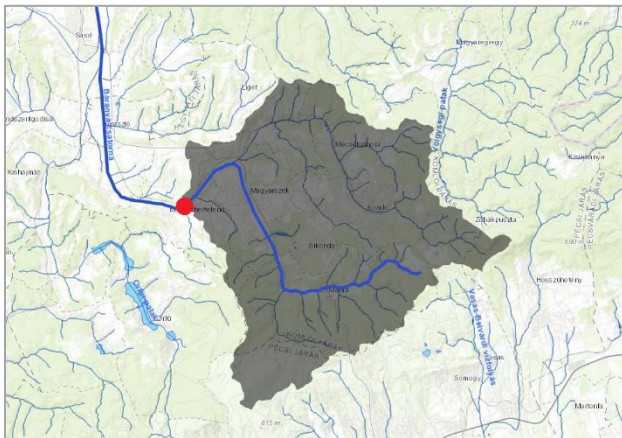
Az elmúlt évtizedben a Dél-dunántúli Vízügyi Igazgatóság (DDVIZIG) működési területének dombvidékein (Kapos -, Baranya-csatorna -, Karasica vízgyűjtői) – a szélsőséges időjárás következményeként – gyakran fordult elő (legutóbb 1999, 2005, 2010 és 2015 években) rövid ideig tartó, heves eső. Ezek a szélsőséges meteorológiai események úgynevezett „Flashflood”-ot vagy villámárvizet okoztak. Az előre nehezen megjósolható, gyors lefolyású árvizek jelentős helyi vízkárokat okoztak a vízgyűjtő lakott, illetve mezőgazdasági művelésű területein egyaránt. A Baranya-csatorna vízgyűjtőjén különösen nagy károkat okoztak a 2010. évi május–június havi esőzésekből kialakult árhullámok. A DDVIZIG 2013-ban bemutatta a „Tározási lehetőségek a Baranya-csatorna vízgyűjtőjén” megnevezésű műszaki tanulmánytervet, melynek kidolgozása 2015-ig tartott. A tanulmányterv feltárta a tározóépítésre alkalmas helyeket a Baranya-csatorna vízgyűjtő jelentősebb vízfolyásain. A lehetséges tározók között szerepelt a Magyarorszáki tározó, melynek az elképzelések szerint a vízkárenyhítés szempontjából lenne jelentős szerepe. Az új tározó a Baranya-csatorna felső szakaszáról, valamint a Kaszánya-patakon érkező árvizek visszatartását biztosítaná. A másodlagos célja a víztartalékolás, öntözővíz biztosítása lenne (DDVIZIG 2015). Cikkünkben a másodlagos célnak legjobban megfelelő tározóméretet szeretnénk becsülni, azaz azt a gazdaságos, lehető legnagyobb méretet, melynél a vízszolgáltatás biztonsága maximális a lehető legnagyobb vízkivétel mellett is.

## VÍZRAJZI ÉS TERÜLETI ADATOK

A tervezett tározó Magyarország déli részén helyezkedik el, közigazgatásilag a Baranya megyéhez tartozó Magyarország és Magyarhertelend községek külterületén. Magyarország tájainak rendszertani felosztása (Marosi és Somogyi 1990) szerint a Baranya-csatorna vízgyűjtőterülete a Dunántúli-dombság nagytáj, a Mecsek és Tolna–Baranyai-dombvidék középtáj, Mecsekvidék kistáj csoporton belül a Mecsek-hegység és a Baranyai-Hegyhát kistájon helyezkedik el. Határai: É-on a Kapos folyó, Ny-on a Zselic, K-en a Völgység, D-en a Mecsek. Éghajlata

mérsékelt meleg, mérsékelt nedves. A napsütéses órák száma 2000-2050 óra között van. Évi középhőmérséklet 9,5 °C körüli. A csapadék évi összege átlagosan 710 – 800 mm között változik.

A tervezett Magyarorszáki tározó a Baranya-csatorna nevű víztest felső szakaszán épül, közel a Baranya-csatorna felső és Kaszánya-patak víztest alsó határához (DDVIZIG 2015). A Magyarország Vízyűjtő-gazdálkodási Terv (VGT 2010) háttéranyaga foglalkozik az éghajlatváltozásra való felkészüléssel is. A vízjárásra vonatkoztatott valószínű jövő szerint a hőmérséklet és a párolgás növekedésével várhatóan kisebb lesz az évi lefolyás. A csapadék éven belüli átrendeződésével a téli hónapokban nő, a nyáriakban csökken a lefolyás. A nyári hónapokban a kisvizek időtartama hosszabbodik, a tavakban az alacsony vízállások gyakorisága nő, időtartamuk hosszabbodik. Az éghajlatváltozásból adódó szélsőséges időjárási helyzetek a villámárvizeknek kedvezőbb feltételeket biztosítanak, ezért az árhullám csökkentés növekvő kihívást jelent a jövőben (Balatonyi 2016). Ugyanakkor a csapadék klímaváltozásból következő, éven belüli átrendeződése a vízvisszatartás és vízhasznosítási célok egyre nagyobb igényét vetíti előre. Ez mind indokolja a víztározók tervezését, építését (Gálai 2011). A Magyarorszáki tározóhoz tartozó vízgyűjtőterület elhelyezkedése az 1. ábrán látható.



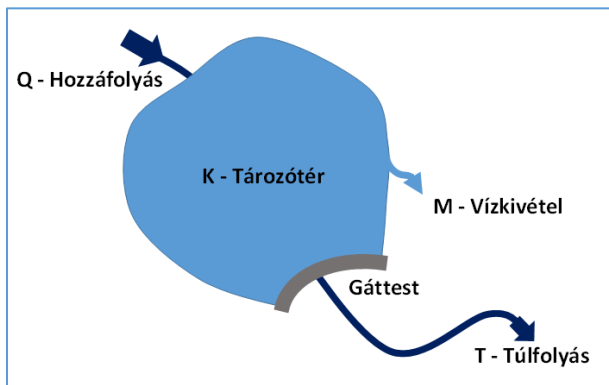
1. ábra. Magyarorszáki tározó vízgyűjtő területe (Forrás: <http://ddvir.ddvizig.hu>)

## A MORAN-FÉLE ELJÁRÁS BEMUTATÁSA

A Moran-modell a tározóban végbemenő folyamatokat vizsgálja, azaz elemzi a tározók állapotváltozásait. A modell alapfeltételei (Moran 1959):

- A tározó az időegység ( $\Delta t$ ) első felében töltődik, azaz nincs vízkivétel, csak hozzáfolyás, az időegység második felében történik a vízkivétel, ilyenkor nem vesszük figyelembe a hozzáfolyást.
- A tározóba folyó vízmennyiségek függetlenek egymástól, azaz  $P(Q_{\Delta t_k} | Q_{\Delta t_{k-1}}) = P(Q_{\Delta t_k})$
- A tározót olyan rendszernek tekintjük, melynek véges sok állapota (telítettségi foka) van, valamint az egyes állapotok bekövetkezésének valószínűségei csak a közvetlenül előtte álló állapotoktól függenek, állapotait véletlenszerűen változtatja. (Az állapotok sorozata sztochasztikus folyamatot, úgynevezett *Markov-láncot* alkot. A *Markov-tulajdonság* azt jelenti, hogy a folyamat jövőbeni állapota csak a jelen állapottól függ, a múltbeli történésektől nem, azaz a rendszer jelenbeli állapota a lényeges, és nem az, hogy miként került a rendszer ebbe az állapotba.)
- A tározó fix küszöbű bukóval van ellátva, amely a többlet vízmennyiséget tovább enged.

Az alábbi egyszerűsített 2. ábra mutatja az eljárás logikai vázát:



2. ábra. Moran-modell elemei

Az alapul választott  $\Delta t$  időegység rendszerint egy év vagy egy hónap. Célszerűbb egy évet venni, mivel így a hozzáfolyások függetlenségének hipotézise rendszerint teljesül, a  $\Delta t=1$  hónap időegységnél már nem minden esetben. Ha  $\Delta t=1$  év, akkor a hozzáfolyás a téli félévben, a vízkivétel a nyári félévben történik, így ezen feltétel miatt a tározási modell különösen a mezőgazdasági vízhasznosítású tározókra jól alkalmazható. A tározó működését legtömörebben a Moran-féle úgynevezett minimax egyenlet fejezi ki (Kontur és társai 1993):

$$\xi_t^{\text{össz}} = \max\{\min[(\xi_{t-1}^{\text{össz}} + Q_t), K] - M, 0\}, \quad K > M,$$

ahol  $t$  az időpontot jelöli ( $\Delta t=1$  év időlépéssel);  $\xi_t^{\text{össz}}$ ,  $\xi_{t-1}^{\text{össz}}$ , a tározó adott év őszi feltöltöttségi állapotát, mint valószínűségi változó írja le;  $Q_t$  az adott évi hozzáfolyás a, mint valószínűségi változó;  $K$  a teljes tározótér és  $M$  a vízkivétel konstansok. A szögletes zárójelben lévő szélsőérték (minimum) az adott év tavaszán a tározóban található vízkészletet jelöli, ami nem lehet több, mint a  $K$  teljes tározótérfogat, ezt szintén valószínűségi változóként értelmezzük. Az így megkapott minimális készletből használjuk fel az  $M$  vízkivételt, ezt jelöli a  $-M$ . A tározótér őszi feltöltöttségi állapotát vagy a megmaradt vízkészlet vagy az üres tározótér (a 0 jelöli) jellemzi.

Első lépésként határozzuk meg az  $G(x) = P(Q_t < x)$  empirikus eloszlásfüggvényt, ami a tározóba érkező lehetséges vízmennyiségek meg-nem haladási valószínűségét, tartóssági görbáját adja. Az így kapott görbéről kinyerhető tetszőleges  $G(x)$  érték felhasználásával már meghatározható ismert  $K$  és  $M$  függvényében a  $\Delta t$  időszak végi (őszi) tározóállapotok valószínűségi eloszlása, azaz az  $F(x) = P(\xi^{\text{össz}} < x)$  elméleti eloszlásfüggvény.

A feladatunk megoldásához  $G(x)$  és  $F(x)$  felhasználásával kiszámítjuk a

$$P_{ij} = P(\xi_t^{\text{össz}} = j | \xi_{t-1}^{\text{össz}} = i)$$

egylépéses átmenet-valószínűségeket, majd azok határeloszlását.

Jelöljék valamely rendszer állapotait a  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$  időpontokban az  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  valószínűségi változók felvett értékei. Legyen a  $t_0$  időpontban  $X_0 = x_0$ , és a  $t_n$  időpontban  $i$ , a  $t_{n+1}$  időpontban  $j$  állapotban a rendszer, azaz  $X_n = i$  és  $X_{n+1} = j$ . *Egylépéses átmenet-valószínűségnek* nevezzük azt a valószínűséget, hogy  $X_{n+1}$  a  $j$  állapotban van, feltéve, hogy  $X_n$  az  $i$  állapotban van. Képlettel:  $P_{ij}^{n,n+1} := P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ .

A matematikai leírás jobb megértése érdekében osszuk fel a  $K$  tározótér karakterisztikus térfogategységre, ami azt jelenti, hogy a  $K, M$  és  $Q$  értékeket ilyen egységekben értelmezzük (pl.  $10^6 \text{ m}^3$ ). Az egylépéses átmenet-valószínűség azt jelenti, hogy egy adott állapotból milyen valószínűséggel megy át a feltöltöttség egy egységnyivel eltérő állapotba. Keresett mátrixunk bal felső  $P_{00}$  eleme az üres tározótérből való üres tározótérbe való átmenet-valószínűségét mutatja. Ez úgy történhet, ha az üres tározóterünkbe érkező valamennyi vízhozamot felhasználtuk ( $M \geq Q$ ).

Ha az egylépéses átmenet-valószínűségek függetlenek  $n$ -től, azaz az időtől (esetünkben 1 év), akkor azt mondjuk, hogy a Markov-folyamatnak *stacionáriusak az átmenet-valószínűségei*. A Markov-láncok döntő többsége rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Ebben az esetben

$$P_{ij}^{n,n+1} := P_{ij}$$

és  $P_{ij}$  annak a valószínűségét jelenti, hogy az állapotok értéke az  $i$ -ből  $j$ -be megy át egy kísérlet alatt. Most már fel tudjuk írni formálisan a *Markov-tulajdonságot*:

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P_{ij}.$$

A  $P_{ij}$  számok mátrix formájában is elrendezhetők. A  $\mathbf{P} = (P_{ij})$  mátrixot a folyamat *átmenet-valószínűség mátrixának* nevezzük.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0k} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k0} & P_{k1} & \dots & P_{kk} \end{bmatrix}$$

Az egylépéses átmenet-valószínűségi, kvadratikus mátrix mérete általánosságban:  $K-M+1$ . A  $P_{ij}$  mennyiségek nemnegatív számok, sorösszegük egységnyi, mert valamely esemény soronként biztosan bekövetkezik. A Markov-láncot teljes mértékben meghatározza az átmenet-valószínűség mátrixa ( $P_{ij}$ ) és a folyamat 0 időpillanatbeli valószínűségeloszlása. A

$$P^* = \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_k \\ P_0 & P_1 & \dots & P_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0 & P_1 & \dots & P_k \end{bmatrix}$$

mátrixot *határmátrixnak* nevezzük. A  $P_0, P_1, \dots, P_k$  valószínűségeket azt fejezik ki, hogy mekkora valószínűséggel találjuk a rendszert hosszú állapotváltozások sorozata után az egyes 0, 1, ...,  $k$  állapotokban. Kellően sok évet vizsgálva az átmenet-valószínűségi mátrixunk oszlopainak elemei állandósulnak és megmutatják annak a valószínűségét, hogy a  $j$ -ik oszlopnak megfelelő, vagyis  $j$  karakterisztikus egységnyi vízmennyiség milyen valószínűség mellett található a tározóban. A határmátrix számításához két eljárást követhetünk. Addig hatványozzuk  $P$ -t, amíg annak oszlopainak elemei állandósulnak. Vagy felhasználjuk a határmátrix idempotens tulajdonságát, azaz  $P \cdot P = P^*$  tulajdonságot, ami egy egyenletrendszer megoldásához vezet.

Visszatérve a feladathoz végeredményben megkapjuk a különböző felvett tározótérfogatok ( $K$ ), vízfogyasztások ( $M$ ) és vízszolgáltatási valószínűségeket ( $p$ ) összefüggését, azaz a többéves kiegyenlítésű tározó teljesítőképességi görbeseregét, ahol a *vízszolgáltatás biztonsága*:  $p=1-P_0$ , ahol  $P_0$  a kiürülés határvalószínűsége.

### A TÁROZÓMÉRET SZÁMÍTÁSA

A Baranya-csatorna 3+200 km szelvényben található a DDVIZIG csikóstóttósi vízrajzi mérőállomása. Az állomás 1935 óta méri a vízállás-vízhozam adatokat, a csatornán máshol nincs vízrajzi állomás. A DDVIZIG-től kapott utóbbi évi adatok alapján a havi vízhozamok középtételeit Csikóstóttósnél az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. A Baranya-csatorna csikóstóttósi szelvényének havi átlagos vízhozamai [ $m^3/s$ ]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2012	0,863	1,437	1,145	0,479	1,452	0,564	0,161	0,091	0,137	0,307	0,246	0,659
2013	1,68	3,011	8,243	6,732	1,086	0,791	0,286	0,181	0,267	0,469	0,558	0,372
2014	0,452	2,6	0,921	0,512	4,585	0,511	0,719	2,228	7,522	8,550	1,715	3,269
2015	4,317	5,151	3,508	1,309	4,177	0,838	0,380	0,295	0,507	3,056	0,804	0,564
2016	2,045	3,419	2,750	0,759	1,735	0,967	5,358	2,816	0,727	1,062	3,622	0,792
2017	0,560	2,921	2,089	1,004	1,787	0,431	0,407	0,263	0,331	1,000	0,659	2,390
2018	1,620	2,793	9,006	3,438	0,643	0,728	1,051	0,388	0,757	0,277	0,424	0,290

A magyarországi 22+600 km-es szelvény jellemző vízhozamainak meghatározásához a hidrológiai analógia módszerét követtük. A tervezett tározó vízkivételi helye felett torkollik a Baranya-csatornába a Kaszánya-patak, amelynek vízgyűjtője közel azonos a Baranya-csatorna betorkollás feletti vízgyűjtőjével. Az Igazgatóság DDVIR programjának vízgazdálkodási moduljával lehatárolt vízgyűjtőterület (1. ábra) a tározó szelvényében: 100  $km^2$ . A programmal számolt középvízhozam 0,506  $m^3/s$ , a  $Q_{aug80\%}$  vízhozam 0,062  $m^3/s$ , az ökológiai vízigény 0,034  $m^3/s$ . A kalibrált vízhozamokat Magyarországnál a 2. táblázat tartalmazza. (A Csikóstóttóson észlelt vízhozam kb. 28 %-a jelentkezik ebben a szelvényben.)

2. táblázat. A Baranya-csatorna magyarországi 22+600 km-es szelvényére számított havi átlagos vízhozamok [ $m^3/s$ ]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2012	0,242	0,404	0,322	0,134	0,408	0,158	0,045	0,025	0,038	0,086	0,069	0,185
2013	0,472	0,847	2,319	1,894	0,305	0,222	0,080	0,050	0,075	0,132	0,157	0,104
2014	0,127	0,731	0,259	0,144	1,290	0,144	0,202	0,626	2,116	2,405	0,482	0,919
2015	1,214	1,449	0,987	0,368	1,175	0,235	0,107	0,083	0,142	0,860	0,226	0,158
2016	0,575	0,962	0,773	0,213	0,488	0,272	1,507	0,792	0,204	0,298	1,019	0,223
2017	0,157	0,821	0,587	0,282	0,502	0,121	0,114	0,074	0,093	0,281	0,185	0,672
2018	0,455	0,786	2,534	0,967	0,181	0,204	0,295	0,109	0,213	0,078	0,119	0,081

Ez alapján egyszerűen kiszámítható a téli félév (I-II-III-X-XI-XII. hó) alatt lefolyt vízmennyiség (

3. táblázat. Magyarországon a téli félévekben lefolyt vízmennyiségek  $Q_t$  karakterisztikus egységben ( $10^6 m^3$ ) kifejezve

Év	A téli félév alatt lefolyt vízmennyiség $Q_t$ [ $10^6 m^3$ ]
2012/2013	10,437723
2013/2014	3,847793
2014/2015	19,563199
2015/2016	9,341155
2016/2017	8,025850
2017/2018	12,947038

Hangsúlyozzuk, hogy a rendelkezésre álló idősor tározóméretezési célokra igen rövid, megbízhatóbb eredmények eléréséhez lényegesen hosszabb idősorokkal kellene számításokat végezni, de célunk most csak az,

hogy az olvasó betekintést kapjon a sztochasztikus módszerrel való számításba és becsljünk egy optimális és gazdaságos tározóméretet.

A számítás ismertetése előtt célszerű ellenőrizni, hogy az egymást követő évek alatt lefolyt vízmennyiségek független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Ezt például a Wald-Wolfowitz véletlenségvizsgálati próbával eldönthetjük (Reimann és V. Nagy 1984) (4. táblázat).

4. táblázat. Wald-Wolfowitz próba elemeinek számítása

i	$X_i$	$X'_i = X_i - \bar{X}$	$X_i'^2$	$X_i'^4$
1	10,44	-0,255	0,065	0,00423
2	3,85	-6,845	46,854	2195,3
3	19,56	8,865	78,588	6176,073
4	9,34	-1,355	1,836	3,37
5	8,03	-2,665	7,102	50,438
6	12,95	2,255	5,085	25,857
	$\bar{X} = 10,695$		$\Sigma = 139,53 = S_2$	$\Sigma = 8451,042 = S_4$

Számítsuk ki a következő statisztikát:

$$R = \sum_{i=1}^{n-1} X'_i X'_{i+1} + X'_n X'_1 = -73,921$$

Wald és Wolfowitz kimutatták, hogy az

$$R^* = \frac{R - E(R)}{D(R)}$$

standardizált valószínűségi változó aszimptotikusan standard normális eloszlású, azaz, ha  $|R^*| < 1,96$ , akkor a függetlenségre vonatkozó hipotézist 95%-os szinten elfogadjuk.

$$E(R) \approx -\frac{S_2}{n-1} = -27,906,$$

$$D(R) \approx \sqrt{\frac{S_2^2 - S_4}{n-1} + \frac{S_2^2 - 2S_4}{(n-1)(n-2)} - \frac{S_2^2}{(n-1)^2}} = 39,4.$$

Ezekből már kapjuk, hogy  $|R^*| = 1,167 < 1,96$ , azaz a téli félévben lefolyt vízmennyiségek valóban függetlenek és azonos eloszlásúak.

A téli félév alatt lefolyt vízmennyiségeket osztályközökbe soroljuk és beírjuk az abszolút gyakoriságokat:

5. táblázat.  $Q_t$  gyakoriságának meghatározása osztályközönként

Osztályközök [ $10^6 \text{ m}^3$ ]	Abszolút gyakoriság
3,5 - 4,5	1
4,5 - 7,5	0
7,5 - 8,5	1
8,5 - 9,5	1
9,5 - 10,5	1
10,5 - 12,5	0
12,5 - 13,5	1
13,5 - 19,5	0
19,5 - 20,5	1
Összesen	6

Ezek után felvesszünk különböző tározótér fogatokat ( $K [10^6 \text{ m}^3]$ ) és vízkivételeket ( $M [10^6 \text{ m}^3]$ ) majd számítjuk a hozzátartozó határvalószínűségeket. Cikkünkben összesen 11 változatot számítottunk, melyből 7-et az alábbiakban sorszámozva részleteztünk is.  $Q_t [10^6 \text{ m}^3]$  jelöli a hozzáfolyást a téli félévben (Zsuffa és Csapó 1970).

1. Elsőként legyen  $K=10 [10^6 \text{ m}^3]$  és  $M=9 [10^6 \text{ m}^3]$  a nyári félévben. Ekkor az egy lépéses átmenetvalószínűségi mátrix mérete:  $K-M+1=10-9+1=2$ . Vagyis mátrixunk  $2 \times 2$ -es lesz, azaz négy módon kerülhet a rendszer két féle állapotba a vízkivétel után: üres vagy  $1 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -es teltség.

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}.$$

$P_{00}$  az üres állapotból üres állapotba kerülés valószínűsége:  $M=9$ , így a tározó üres lesz, ha a téli félévben  $Q_t=9$  vagy annál kevesebb hozzáfolyás történik. Összegezzük a  $Q_t=9$  vagy annál kisebb hozzáfolyások gyakoriságát az 5. táblázatunkban. Ez 3 esetre adódik, így az összes eset függvényében a relatív gyakoriság  $P_{00} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .

$P_{01}$  az üres állapotból a tározó 1-es teltségi állapotába való kerülésének valószínűsége. Ez  $M=9$  vízkivétel esetén  $Q_t=10$  vagy annál nagyobb hozzáfolyásnál következik be. Tehát az 5. táblázat 5. sorától összegezzük a gyakoriságokat, ez alapján  $P_{01} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ .  $Q=10$ -nél nagyobb hozzáfolyás esetén az árapasztó műtárgyon a fölős vízmennyiségek túlfolynak, hiszen  $K=10$  a maximális tározókapacitás.

$P_{10}$  az 1-es teltségi állapotból az üres állapotba kerülés valószínűsége. Ez  $M=9$  vízkivétel esetén  $Q_t=8$  vagy annál kisebb hozzáfolyás esetén következik be. Ennek valószínűsége:  $P_{10} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

$P_{11}$  az 1-es teltségi állapotból 1 állapotba kerülés valószínűsége. Ez  $M=9$  vízkivételnél akkor következik be, ha a  $Q_t$  hozzáfolyás 9 vagy annál nagyobb, mivel az előző évből maradt  $1 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ . Így  $P_{11} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

Az előzőek alapján:  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ . Ebből kiszámíthatjuk a határmátrixot a  $\mathbf{P}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$  alapján:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{12}{9} & \frac{11}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_2^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{12}{9} & \frac{11}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{12}{9} & \frac{11}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{173}{243} & \frac{259}{243} \\ \frac{432}{243} & \frac{389}{243} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Ez utóbbi már a határmátrix, mivel az oszlopokban szereplő értékek megegyeznek. A határvalószínűségek:

$$P_0 = 0,4 \text{ és } P_1 = 0,6.$$

Levonhatjuk azt a következtetést, hogy nem lenne a legszerencésebb a  $K=10 [10^6 \text{ m}^3]$  és  $M=9 [10^6 \text{ m}^3]$  választás, mivel 40% valószínűséggel üres lenne a tározó, így a vízszolgáltatás biztonsága csak 60% lenne. Soknak tűnik tehát az  $M=9$  vízkivétel.

2. Legyen a második esetben  $K=10 [10^6 \text{ m}^3]$  és  $M=8 [10^6 \text{ m}^3]$ . Ekkor az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix mérete:  $K-M+1=10-8+1=3$ . Hasonlóan az első esethez, a  $P_{ij}$  értékek számításánál az 5. táblázat megfelelő gyakoriságait kell figyelembe venni az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix felírásához:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

A  $\mathbf{P}$  mátrix első oszlopának elemeihez  $Q \leq$  (meg-nem haladási), az utolsó oszlopban  $Q \geq$  (meghaladási), addig a középső oszlopokban  $Q =$  (pontos vízmennyiség) előfordulásának valószínűségét keressük. Ezért most  $P_{01}$  azaz üres állapotból a tározó 1-es teltségi állapotába való kerülésének valószínűségéhez kizárólag a  $Q=9$  előfordulását kell megállapítanunk. Tehát az 5. táblázat 4. sorában szereplő gyakoriságot vesszük, ez alapján  $P_{01} = \frac{1}{6}$ .

A határmátrix számításához fel kell használni a már említett  $\mathbf{P}^* \mathbf{P} = \mathbf{P}^*$  tulajdonságot. Ez alapján:

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_2 \\ P_0 & P_1 & P_2 \end{bmatrix}$$

Ez az alábbi egyenletrendszerhez vezet (tudjuk, hogy  $P_0 + P_1 + P_2 = 1$ ):

$$2P_0 + P_1 + P_2 = 6P_0$$

$$P_0 + P_1 = 6P_1$$

$$3P_0 + 4P_1 + 5P_2 = 6P_2$$

Rendezve és Gauss-eliminációval megoldva kapjuk, hogy

$$P_0 = 0,2, \quad P_1 = 0,04, \quad P_2 = 0,76.$$

Ezeket az értékeket  $\mathbf{P}$  mátrix hatványozásával is ellenőriztük, a 8-dik hatványnál teljes azonosságot kaptunk. A rövid, 6 éves adatsor és a számítások alapján a  $K=10 [10^6 m^3]$  és  $M=8 [10^6 m^3]$  jobb választás lenne, de azért 20% valószínűséggel üres lenne a tározó és 10 millió  $m^3$  térfogatú tározó építése egyébként is indokolatlanul nagy lenne Magyarországnál.

3. Elméleti szinten a harmadik esetben legyen azért  $K=10 [10^6 m^3]$  és  $M=7 [10^6 m^3]$ . A számítások elvégzése előtt sejtethető, hogy ez még az előző esetnél is magasabb értéket fog adni a vízszolgáltatás biztonságát tekintve. Az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix mérete:  $K-M+1=10-7+1=4$ . Az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Az előző esethez hasonlóan, felhasználva a határvalószínűségi mátrix projektor (idempotens) tulajdonságát, megoldhatjuk a négy ismeretlenes egyenletrendszer. A megoldás adja a határeloszlást:

$$P_0 = 0,17, \quad P_1 = 0,03, \quad P_2 = 0,03, \quad P_3 = 0,77.$$

Az  $M=7$  vízszolgáltatás biztonsága  $1-P_0=83\%$ -ra növekszik, ami elég jó eredmény, de a már megtervezett tározótérfogat több mint hatszorosa igényelné, mint kapacitás.

4. Tervezzünk most eggyel kisebb méretű tározót, azaz legyen  $K=9 [10^6 m^3]$  és  $M=8 [10^6 m^3]$ . A számításokat az 1. esethez hasonlóan végezzük.

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$P_2 = P_1^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{36} & \frac{28}{36} \\ \frac{7}{36} & \frac{29}{36} \end{bmatrix}$$

$$P_4 = P_2^2 = \begin{bmatrix} \frac{8}{36} & \frac{28}{36} \\ \frac{7}{36} & \frac{29}{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{8}{36} & \frac{28}{36} \\ \frac{7}{36} & \frac{29}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{260}{1296} & \frac{1036}{1296} \\ \frac{1296}{1296} & \frac{1037}{1296} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Megállapíthatjuk, hogy ez a méretezés és vízkivétel sem lenne a leggazdaságosabb, mivel a határvalószínűségek:

$$P_0 = 0,2 \text{ és } P_1 = 0,8.$$

5. Maradjunk ennél a méretnél, de vegyük lejjebb a vízkivételt, azaz  $K=9 [10^6 m^3]$  és  $M=7 [10^6 m^3]$ . Az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Kiszámítva a határvalószínűségeket adódik, hogy  $P_0 = 0,17$ ;  $P_1 = 0,03$  és  $P_2 = 0,8$ , tehát ehhez a méretezéshez az  $M=7$  vízkivétel jobb választás. Az ennél kisebb vízkivételeket már nem szükséges vizsgálni, mert 83 %-os biztonságnál csak nagyobb értéket kaphatunk.

6. Építsünk most még kisebb tározót, legyen  $K=8$  [ $10^6$   $m^3$ ] és  $M=7$  [ $10^6$   $m^3$ ]. Ekkor a

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix egyúttal a határmátrix is, tehát  $P_0 = 0,17$  és  $P_1 = 0,83$ . Itt a méretezés gazdaságosabb lenne, mint az 4. esetben, hiszen a kiürülési valószínűségek egyenlők. Tehát ugyanazt a biztonságot azonos vízkivétel esetében lényegesen kisebb tározóval is elérhetjük.

7. Nézzük meg végül a  $K=7$  [ $10^6$   $m^3$ ] és  $M=5$  [ $10^6$   $m^3$ ] esetet. Az egylépéses átmenetvalószínűségi mátrix:

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Kiszámítva a határvalószínűségeket adódik, hogy  $P_0 = 0,03$ ;  $P_1 = 0,14$  és  $P_2 = 0,83$ . Ezzel elérkeztünk az elméletileg lehetséges legnagyobb tározóméret becült értékéhez ( $K=7$ ), melyben a kiürülés valószínűsége a lehető legnagyobb vízkivétel ( $M=5$ ) mellett is minimális ( $P_0=3\%$ ), azaz a vízszolgáltatás biztonsága maximális ( $1-P_0=97\%$ ).

A további számítások részletezésétől eltekintve a 6. táblázatba foglaltuk valamennyi számításunk eredményét, azaz a tározó kiürülési valószínűségeit és az egyéb állapotvalószínűségeket:

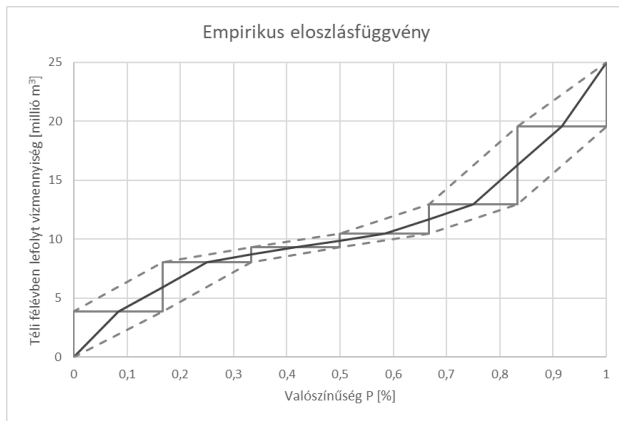
6. táblázat. A különböző tározóméretetek és vízkivételekhez számított állapotvalószínűségek értékei

Table 6. The values of the transition probabilities for the different reservoir sizes and water withdrawal

K [ $10^6$ $m^3$ ]	M [ $10^6$ $m^3$ ]	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
10	9	0,4	0,6		
10	8	0,2	0,04	0,76	
10	7	0,17	0,03	0,03	0,77
9	8	0,2	0,8		
9	7	0,17	0,03	0,8	
8	7	0,17	0,83		
8	6	0,17	0	0,83	
7	6	0,17	0,83		
7	5	0,03	0,14	0,83	
6	5	0,17	0,83		
6	4	0	0	1	

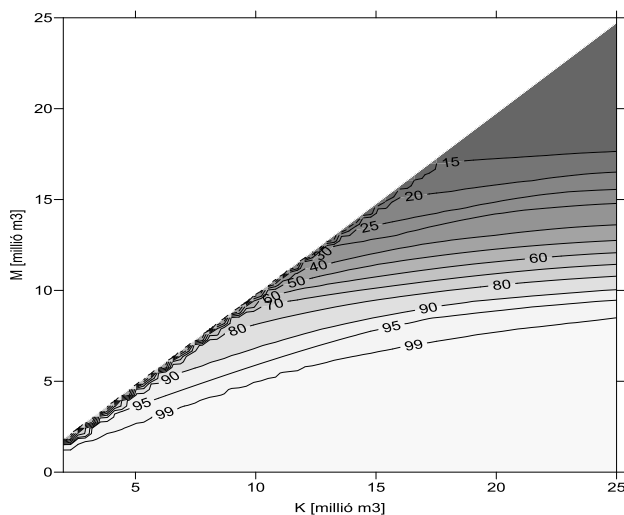
Az ismertetett elméleti háttér alapján, egyszerű táblázatkezelő szoftver segítségével algoritmizáltuk a számításokat és 11 eset helyett immár  $K$  és  $M$  1767 kombinációját vizsgáltuk meg. Itt is az 5. táblázatban megadott gyakorisági értékeket használtuk, de a számítások egyszerűsítése végett két apró módosítással éltünk. Először az elméleti eloszlásfüggvények alakjának biztosítása miatt 25 millió  $m^3$  lefolyt vízmennyiséget vettük a maximumnak. Az így megrajzolható empirikus lépcsős eloszlást a 3. ábra szemlélteti. Másodszor az empirikus eloszlás lépcsős függvénye helyett annak burkolóit és kiegyenlítő görbét vettük alapul a gyakorisági értékek meghatározásánál. Ennek oka a kevés adatból eredő nagy lépcsőméret volt. A burkolókat a lépcsőfokok alsó illetve felső sarkait összekötő törtvonalakon lineáris interpolációval számoltuk. A kiegyenlítő görbét pedig a lépcsőfokok közepén áthaladó vonalláncként vettük fel és a töréspontok közötti értékeket szintén lineáris interpolációval számítottuk.





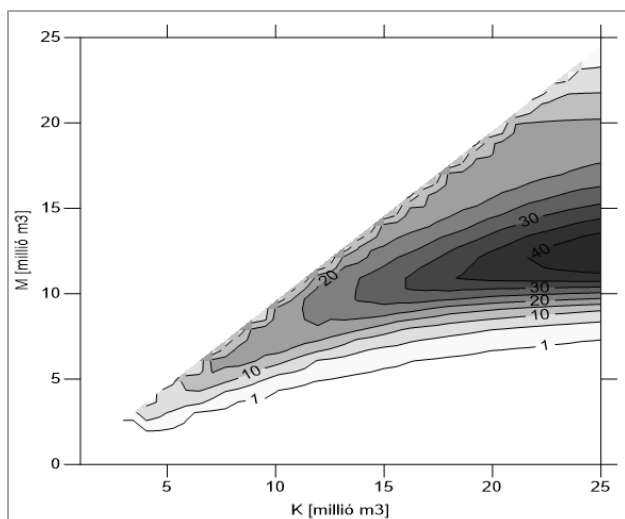
3. ábra. Empirikus eloszlásfüggvény közelítése

Az így értelmezett három gyakorisági görbe alapján három féle  $P$  átmenet-valószínűségi mátrixot állítottunk elő ( $P_{\text{alsó}}$ ,  $P_{\text{közepes}}$ ,  $P_{\text{felső}}$ ). Zsuffa és Gálai (1987) nyomán egyenletrendszer megoldási módszerrel kiszámoltuk mindhárom mátrixból az ergodikus határállapot eloszlást (határmátrix), melyekből a kiürülés  $P_0$  valószínűségi értékét használtuk fel. Ezt követően egyszerű kivonással  $(1-P_0)*100$  megkaptuk az adott K-M kombinációhoz tartozó vízszolgáltatási biztonság értékét. Ez természetesen minden K-M párosításhoz három eredményt adott: egy alsó-, egy felső- és egy közepes vízszolgáltatási biztonsági értéket. A szemléletesség kedvéért a 4. ábrán grafikusán is bemutatjuk az empirikus lépcsős függvény kiegyenlítő görbéje alapján számított vízszolgáltatás várható biztonságát. Az ábra szerkesztésénél azt is figyelembe vettük, hogy  $K=M$  esetén a biztonság mindig zérus illetve  $M=0$  esetén a biztonság mindig 100 %-os.



4. ábra. Különböző tározótérfogatokhoz (K) és vízkivételekhez (M) tartozó vízszolgáltatási biztonság

Utolsó lépésként, felhasználtuk a 3. ábrán bemutatott, lépcsős függvény, burkoló görbéiből származtatott alsó és felső vízszolgáltatási biztonság értékeket is. Ezek a számítások a 4. ábrához hasonló grafikonokat szolgáltatottak. Az így kapott két grafikon különbsége minden egyes K-M párosításhoz megadja azt a szignifikancia sávot, melyben a 4. ábráról leolvasott eredmény értelmezhető. Ezzel tulajdonképpen az eredménynek az alapadatok mennyiségétől függő megbízhatóságára is becslést kapunk (5. ábra).



5. ábra. Különböző tározótérfogatokhoz (K) és vízkivételekhez (M) tartozó vízszolgáltatási biztonsági értéktartomány megbízhatósága

Ez egy fontos információ, mert a rövid idősor alapján - melyre a vizsgálatunkat építettük - csak nagy lépcsőfokokkal rendelkező empirikus eloszlást szerkeszthetünk, ami lényegesen kevésbé megbízható eredménnyel szolgál, mint egy hosszabb idősor. Kellően hosszú idősor esetén az empirikus eloszlás egyre jobban közelítene egy folytonos, elméleti eloszlásfüggvényhez. Az 5. ábrán jól látható, hogy 15 millió  $m^3$ -t meghaladó tározótérfogat (K) és 10-15 millió  $m^3$  vízkivétel (M) tartományban az eredmény bizonytalansága már 20 %-ot meghaladó sávban van. Míg a kézi számítás eredményei a 10 %-osan megbízható tartományon belül mozognak.

## KÖVETKEZTETÉSEK

Cikkünkben az utóbbi 7 évben Csikóstöttösön, a Baranya-csatornán mért havi középvízhozamokat számítottuk át a magyarszéki havi középvízhozamokra, majd ezekből az adatokból meghatároztuk a téli félévben lefolyt vízmennyiségeket. Wald-Wolfowitz-próbával megmutattuk, hogy ezek az adatok, mint valószínűségi változók függetlenek és azonos eloszlásúak, tehát statisztikai mintát képeznek. Mindezek alapján rövid idősorunk is használhatóvá vált a Moran-féle tározóméretezési módszer bemutatására. A méretezési eljárás során különböző tározóméret és vízkivétel esetén számítottuk, hogy az ismertnek tekintett eloszlású hozzáfolyás alapján mekkora valószínűséggel kerül a tározó különféle telítettségi állapotokba és mekkora lesz a kiürülés valószínűsége. A kézi számítások alapján azt kaptuk, hogy, ha a lehető legnagyobb vízmennyiséget szeretnénk kivenni az ehhez tartozó leggazdaságosabb térfogat mellett, akkor ezt a  $K=7 [10^6 m^3]$  és  $M=5 [10^6 m^3]$  esetben érhetjük el 97%-os biztonsággal. Ugyanehhez a kombinációhoz gépi számítással is kiszámoltuk vízszolgáltatási biztonság alsó-, közép- és felső értéket (85,64; 92,99; 100,00), mely visszaigazolta kézi megoldásunk helyességét. Ez a tározótérfogat azonban csak egy elméleti érték, a magyarszéki tározó tervezett méretei ( $K=1,28 [10^6 m^3]$ ) ennél jóval szerényebbek. A kiépíthetőség méretének a geomorfológia nyilvánvaló korlátait is figyelembe kellett venni, másrészt nem a vízkivétel maximalizálása volt a tározóépítés elsődleges célja. Ha azonban a jövőben egyszer a vízkivétel maximalizálása lenne a fő cél, akkor további tározóterek kiépítésével a kisvízfolyásban rejlő vízhasznosítási kapacitás még tovább fokozható. Ilyen igény esetén a hozzáférhető teljes vízhozam adatsorral volna célszerű számításainkat elvégezni, valamint kontrollként a vízhasznosítási teljesítőképességi görbét is meghatározni, például a Rippl-diagram módszerével.

A Magyarszéki tározótér területének előkészítése befejeződött, így a tereprendezés 2019 tavaszán elkezdődhet, a teljes projekt befejezése 2019 júniusára várható. A létesítmény komplex hasznosítású lesz, vagyis az árvízveszély elhárításán túl lehetőséget teremt majd rekreációs célokra is.



6. ábra. A Magyarszéki tározó látványképe (Forrás: <http://www.ddvizig.hu>)

## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Köszönetet mondunk Horváth Gábor osztályvezető úrnak, aki a Dél-dunántúli Vízügyi Igazgatóság Vízirajzi és Adattári Osztályáról rendelkezésre bocsátotta a számításokhoz szükséges vízhozam adatokat, a Magyarszéki tározó tervezésének műszaki leírását és a tározó alapadatait.

## IRODALOMJEGYZÉK

Balatonyi L. (2016). Villámárvíz, mint potenciális természeti veszélyforrás: Monitoring alapú kisvízgyűjtő optimalizálás a hegy- és dombvidéki árvizek pontosabb előrejelezhetőségéért. Budapest, Magyarország. GlobeEdit ISBN: 9783330806573

DDVIZIG (2015). Magyarszéki tározó – Elvi vízjogi engedélyezési terv, műszaki leírás

Gálai A. (2011). Bolyongás a szikes tavak körül, Szivattyús kiegészítő vízutánpótlás tervezése sztochasztikus eszközökkel, Hidrológiai Közlöny 91. évf. 1. szám, p35-39.

Kontur I., Koris K., Winter J. (1993). Hidrológiai számítások. Akadémiai Kiadó, Budapest

Marosi S. és Somogyi S. (szerk.) (1990): Magyarország kistájainak katasztere I-II. MTA Földrajztudományi Kutató Intézet, Budapest, 1023 old.

Moran, P. A. P.(1959). The Theory of Storage. Methuen and Co. Ltd. London

Reimann J. és V. Nagy I. (1984). Hidrológiai statisztika, Tankönyvkiadó, Budapest.

VGT (2010). Magyarország Vízyűjtő-gazdálkodási Terve; Magyar Közlöny 2010. évi 84. szám (1127/2010. (V. 21.) Korm. határozat)

Zsuffa I. és Csapó Gy. (1970). Tározómedencék méretezése a sztochasztikus folyamatok elméletével, Hidrológiai Közlöny, Budapest

Zsuffa I. és Gálai A. (1987). Reservoir Sizing by Transition Probabilities; Theory, Methodology and Application, an Hardcover engineering textbook, Water Resources Publications, ISBN: 0-918334-62-4 ISBN-13: 978-0-918334-62-6.